

Приложение 1

Докажем четыре теоремы из теории электрических цепей, которые позволяют упростить анализ схем. Эти теоремы доказываются для переменного тока, но, как легко убедиться, они справедливы и для постоянного.

Теорема I

«*Линейный двухполюсник¹⁾, содержащий электродвижущие силы (рис. П.1а), может быть заменен эквивалентным генератором, схема которого (рис. П.1б) содержит источник тока²⁾ с силой I_3 , равной току короткого замыкания двухполюсника, и включенного параллельно ему сопротивлению Z_3 , равного входному сопротивлению двухполюсника при закороченных внутри него эдс».*

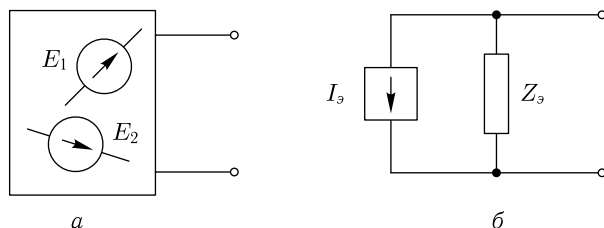


Рис. П.1

Доказательство

Найдем ток I , текущий через рассматриваемый двухполюсник, если к его зажимам приложено напряжение U от некоторой внешней эдс (рис. П.2а). Ток, текущий через зажимы двухполюсника при закороченной внешней эдс и действующих внутренних эдс, равен $I_{кз}$ (рис. П.2б). Ток, текущий через зажимы двухполюсника при закороченных внутренних эдс и действующей внешней эдс равен $-\frac{U}{Z_3}$, где Z_3 — входное сопротивление двухполюсника при закороченных внутренних эдс (рис. П.2в).

Отсюда, на основании принципа наложения, ток, текущий через зажимы двухполюсника при одновременном действии внешней и внутренних эдс, равен

$$I = I_{кз} - \frac{U}{Z_3}.$$

Такой же ток протекает через зажимы двухполюсника, состоящего из параллельно включенных источника тока $I_3 = I_{кз}$ и сопротивления Z_3 .

¹⁾ Т.е. двухполюсник, к которому приложим принцип наложения (суперпозиции).

²⁾ Источники тока обозначаем квадратами.

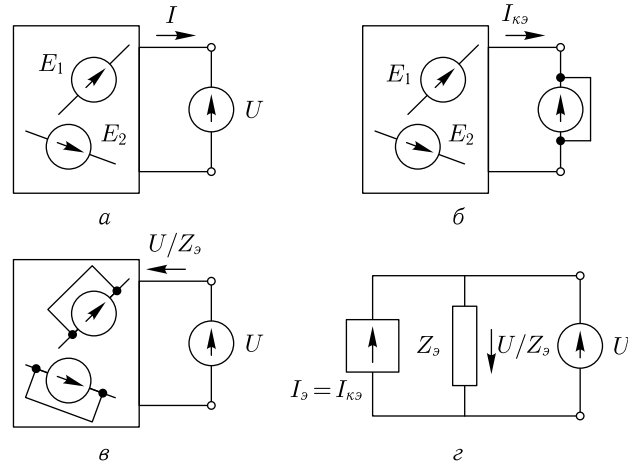


Рис. П.2

Действительно, ток \mathbf{I} равен току, даваемому источником тока, минус ток, ответвляющийся в сопротивление $\mathbf{Z}_з$ и равный $\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}_з}$.

Первая теорема, таким образом, доказана.

Под источником тока надо понимать устройство, дающее ток определенной силы, причем величина тока не зависит от приложенного к этому устройству напряжения. Его можно представить, например, как генератор с бесконечно большой эдс и бесконечно большим внутренним сопротивлением. Такой генератор создает ток, равный отношению эдс к внутреннему сопротивлению при любом конечном напряжении на его зажимах. Поэтому в случае применения принципа наложения, когда эдс закорачиваются, источники тока являются бесконечно большими сопротивлениями, т. е. разрывами цепи.

Теорема II

«Линейный двухполюсник, содержащий электродвижущие силы, может быть заменен эквивалентным генератором, схема которого (рис. П.3) содержит эдс $\mathbf{E}_з$, равную напряжению холостого хода на зажимах двухполюсника, включенную последовательно с сопротивлением $\mathbf{Z}_з$, равным входному сопротивлению двухполюсника при закороченных эдс, содержащихся в нем».

Доказательство

В теореме I показано, что ток, текущий через зажимы линейного двухполюсника, может быть выражен так:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{кз} - \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}_з} = \frac{\mathbf{I}_{кз}\mathbf{Z}_з - \mathbf{U}}{\mathbf{Z}_з} = \frac{\mathbf{U}_{xx} - \mathbf{U}}{\mathbf{Z}_з}. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $\mathbf{U}_{xx} = \mathbf{I}_{кз}\mathbf{Z}_з$ — напряжение холостого хода на зажимах двухполюсника, так как при $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{xx} = \mathbf{I}_{кз}\mathbf{Z}_з$ имеем $\mathbf{I} = 0$.

Ток, протекающий в схеме рис. П.4, также выражается ф-лой (П.1), поскольку по условию $\mathbf{E}_з = \mathbf{U}_{xx}$.

Теорема II, следовательно, доказана.

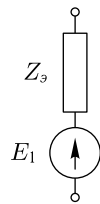


Рис. П.3

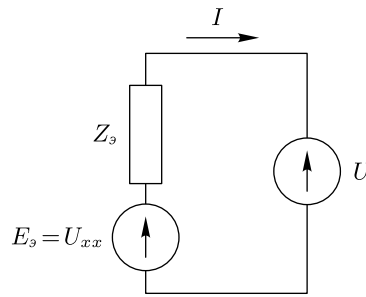


Рис. П.4

Теорема III

«Если в один из проводов, соединяющих двухполюсник А, содержащий эдс, с двухполюсником Б, не содержащим эдс, включить сопротивление Z (рис. П.5а и П.6а), то напряжения и токи в двухполюснике Б уменьшатся от этого во столько раз, во сколько увеличится сопротивление цепи, в которую включается Z ».

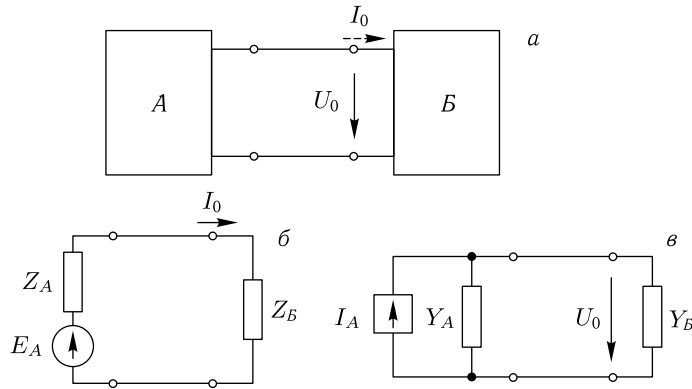


Рис. П.5

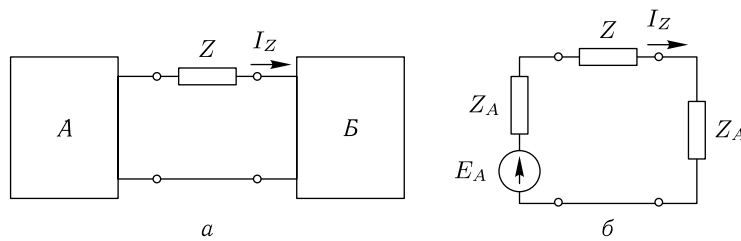


Рис. П.6

Доказательство

Заменим согласно теореме II двухполюсник A эквивалентным генератором с эдс E_A и внутренним сопротивлением Z_A , а двухполюсник B — сопротивлением Z_B , равным его входному сопротивлению. Тогда схеме, изображенной на рис. П.5а, соответствует схема рис. П.5б, а схеме, изображенной на рис. П.6а — схема рис. П.6б. Из этих рисунков следует, что ток, входящий в двухполюсник B при отсутствии сопротивления Z , равен

$$I_0 = \frac{E_A}{Z_A + Z_B},$$

а при включенном сопротивлении

$$I_Z = \frac{E_A}{Z_A + Z_B + Z}.$$

Отсюда

$$\frac{I_Z}{I_0} = \frac{Z_A + Z_B}{Z_A + Z_B + Z}. \quad (\text{П.2})$$

В это же число раз изменится и напряжение на входе двухполюсника B , а значит, и все токи и напряжения в нем. Числитель ф-лы (П.2) равен сопротивлению цепи, куда включается Z при отсутствии Z , а знаменатель — сопротивлению этой же цепи при включенном Z . Следовательно, теорема III доказана.

Теорема IV

«Если между двумя проводами, соединяющими двухполюсник A , содержащий эдс, с двухполюсником B , не содержащим эдс, включить проводимость Y (рис. П.5а и П.7а), то напряжения и токи в двухполюснике B уменьшатся от этого во столько раз, во сколько увеличится проводимость между точками присоединения Y ».

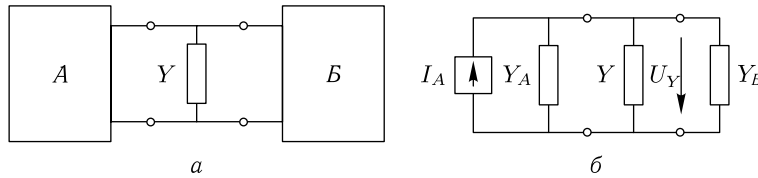


Рис. П.7

Доказательство

Заменим согласно теореме I двухполюсник A эквивалентным генератором с источником тока, а двухполюсник B — проводимостью, равной его входной проводимости. Тогда схеме, изображенной на рис. П.5а, соответствует схема рис. П.5в, а схеме, изображенной на рис. П.7а, — схема рис. П.7б.

Напряженье на входе двухполюсника B при отсутствии проводимости Y равно

$$U_0 = \frac{I_A}{Y_A + Y_B},$$

а при включенной проводимости Y

$$U_Y = \frac{I_A}{Y_A + Y_B + Y}.$$

Отсюда

$$\frac{U_Y}{U_0} = \frac{Y_A + Y_B}{Y_A + Y_B + Y}. \quad (\text{П.3})$$

Во столько же раз уменьшатся все токи и напряжения в двухполюснике B . Числитель ф-лы (П.3) — проводимость между точками, к которым подключается Y при отсутствии Y ; знаменатель — проводимость между этими же точками при включении Y .

Таким образом, теорема IV доказана.

Приложение 2

Если требуется аппроксимировать характеристику степенным рядом с тремя членами:

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2,$$

то нахождение коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 производится следующим образом. Напряжению U_0 в рабочей точке A (рис. П.8) даются приращения $+\Delta$ и $-\Delta$, соответствующие возможным изменениям u , и определяются токи i_1 , i_2 и i_3 . С другой стороны, на основании (8.19)

$$\begin{cases} i_1 = a_0 - a_1\Delta + a_2\Delta^2, \\ i_2 = a_0, \\ i_3 = a_0 + a_1\Delta + a_2\Delta^2. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned} a_0 &= i_2, \\ a_1 &= \frac{i_3 - i_1}{2\Delta}, \\ a_2 &= \frac{i_3 + i_1 - 2i_2}{2\Delta^2}. \end{aligned}$$

При аппроксимации характеристики степенным рядом с пятью членами:

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3 + a_4(u - U_0)^4$$

напряжению U_0 даются приращения $+\Delta$, $-\Delta$, $+2\Delta$, -2Δ и определяются токи i_1 , i_2 , i_3 , i_4 и i_5 (рис. П.9). Затем составляется система уравнений:

$$\begin{cases} i_1 = a_0 - a_1\Delta + a_2\Delta^2 - a_3\Delta^3 + a_4\Delta^4, \\ i_2 = a_0 - a_1\Delta + a_2\Delta^2 - a_3\Delta^3 + a_4\Delta^4, \\ i_3 = a_0, \\ i_4 = a_0 + a_1\Delta + a_2\Delta^2 + a_3\Delta^3 + a_4\Delta^4, \\ i_5 = a_0 + a_1\Delta + a_2\Delta^2 + a_3\Delta^3 + a_4\Delta^4. \end{cases}$$

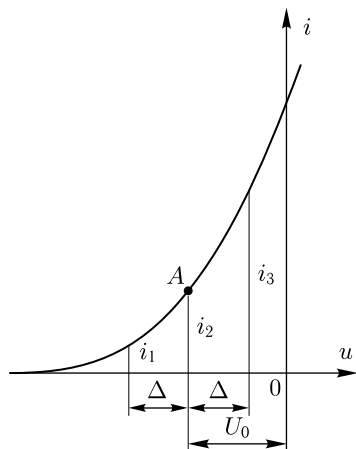


Рис. П.8

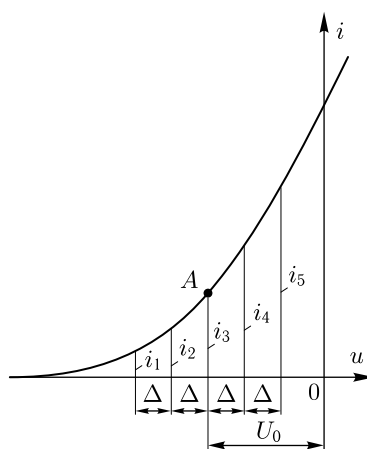


Рис. П.9

Отсюда

$$\begin{aligned}
 a_0 &= i_3, \\
 a_1 &= \frac{8(i_4 - i_2) - (i_5 - i_1)}{12\Delta}, \\
 a_2 &= \frac{16(i_4 + i_2) - (i_5 + i_1) - 30i_3}{24\Delta^2}, \\
 a_3 &= \frac{(i_5 - i_1) - 2(i_4 - i_2)}{12\Delta^3}, \\
 a_4 &= \frac{(i_5 + i_1) - 4(i_4 + i_2) + 6i_3}{24\Delta^4}.
 \end{aligned}$$